

COURS : THEORIE DES POUTRES – CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

I) Généralités :

1.1) But de l'étude :

La stabilité des structures est fonction de la « solidité » des sections qui la composent. En effet, si l'on place une section de dimensions faibles à un endroit où les sollicitations sont importantes, il risque d'y avoir rupture.

Le but de la mécanique des structures est naturellement de choisir la forme la plus adaptée pour la poutre.

Des critères tels que l'économie nous poussent à trouver les dimensions les plus justes.

⊗ Remarque : une autre grandeur entre en compte : la résistance du matériau.

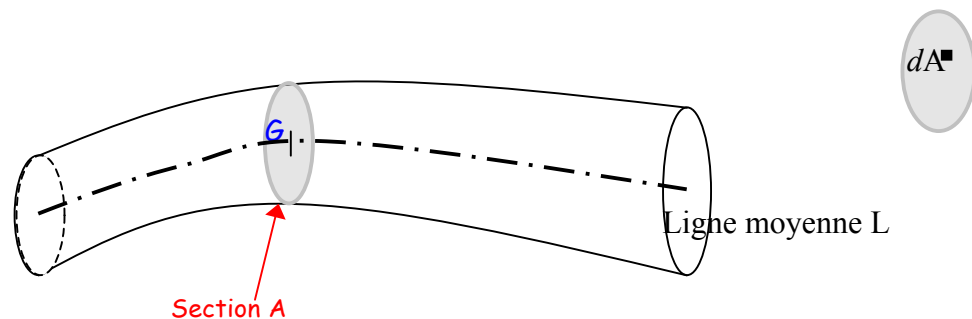
1.2) Poutres ou barres ?

Lors de l'étude statique, nous avons remplacé les éléments volumiques par des barres. La mécanique des structures, elle, traite non plus de barres, mais de poutres (éléments volumiques particuliers).

1.3) Définition d'une poutre :

Une poutre est un solide engendré par une aire plane (A) dont le centre de gravité (G) décrit une ligne dite moyenne (L) en restant normale à cette ligne.

A est aussi appelée section droite de la poutre.



On remarque que :

- la poutre est composée d'une infinité de fibres de section « dA » ;
- la ligne moyenne peut aussi bien être une droite qu'une courbe (poutres droites ou poutres courbes) ;
- la section peut aussi bien être constante que variable.

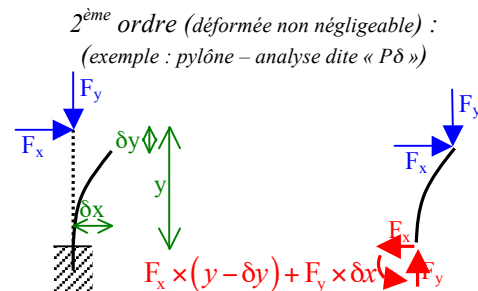
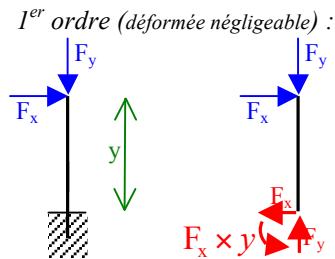
⊗ Remarque : ce que l'on modélise en statique, c'est uniquement la ligne moyenne.

II) Hypothèses :

Afin de résoudre le problème grâce à la mécanique des structures, il faut que le volume traité soit une poutre c'est à dire :

- *concernant la géométrie :*
 - les dimensions transversales doivent être faibles devant la longueur de l'élément (environ 1 pour 10 au maximum) ;
 - le rayon de courbure de la ligne moyenne L doit être grand (« cintrage » faible) (rayon de courbure supérieur à 5 fois la longueur) ;
 - la variation de la section doit être lente et progressive ;
- *concernant le matériau composant la poutre :*
 - le matériau doit être homogène (1 seul matériau, ce qui exclu le béton armé) et isotrope (même propriété dans toutes les directions, ce qui exclu le bois) ;
 - le matériau est sollicité dans le domaine élastique (déformations réversibles et proportionnelles à l'effort appliqué) ;
- *concernant les sollicitations :*
 - les déformations doivent rester faibles (on se limitera à la théorie du premier ordre) ;

⊗ Remarque :



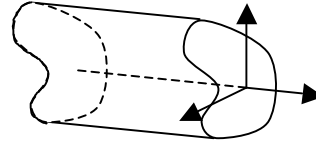
« A » aire totale

III) Notations et définitions d'une section et d'une fibre :

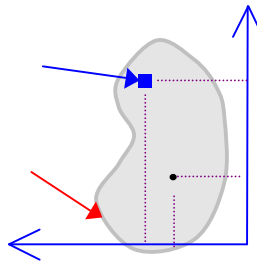
3.1) Schéma d'une section :

Soit la poutre suivante :
Section « S_i » de la poutre

Remarque : on prendra ce repère (y, O, z) pour la simple raison que l'axe des x représente l'axe longitudinal de la poutre :



L'aire plane A est alors représentée par la section suivante :



3.2) Définitions :

a) Section :

Une section est une tranche transversale infiniment fine de la poutre. Elle peut être représentée dans un repère cartésien orthonormé (y, O, z).

b) Fibre :

Une fibre est un élément infinitésimal de la section (infiniment petite). Elle se note dA.

aire « dA »
 aire totale
 aire « A_2 »
 $= A_1 + A_2 = \sum A_i$

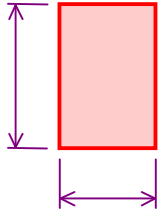
IV) Aire :
 Section « S_i »
 de la poutre

4.1) Définition :

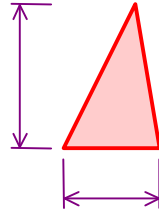
L'aire est la quantification d'une surface plane.

4.2) Rappels :

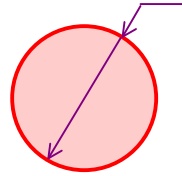
a) Valeurs usuelles :



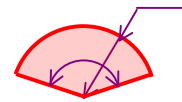
$A_{\text{rectangle}} = b \times h$



$A_{\text{triangle}} = \frac{b \times h}{2}$



$A_{\text{disque}} = \frac{\pi \times D^2}{4}$



$A_{\text{portion disque}} = \frac{\alpha \times D^2}{8}$

b) Unité et conversion :

L'unité SI d'une aire est le [m²]

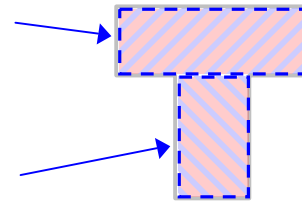
$1000 \text{ mm}^2 = 10 \times 10^2 \text{ mm}^2 = 10 \text{ cm}^2$

$1000 \text{ mm}^2 = 1000 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

4.3) Aire des sections décomposables :

L'aire totale correspond à la somme des aires élémentaires A_i qui composent la section :

$A = \sum_{i=1}^n A_i$

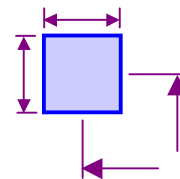


4.4) Aire d'une fibre :

L'aire d'une fibre est notée dA .

$dA = dz \times dy$

Remarque : le « d » correspond à « infinitésimal ».

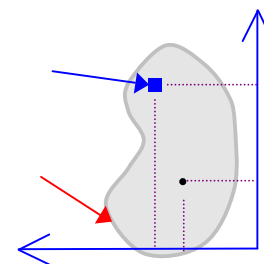


4.5) Aire des sections quelconques :

L'aire (A) totale d'une section correspond à la somme des aires de ses fibres (dA) :

$A = \int_A dA = \iint_{z,y} dz \times dy$

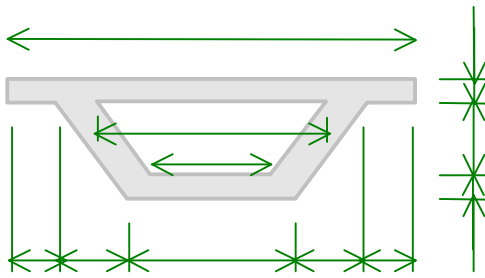
Remarque : ici, le terme somme ne s'écrit pas \sum mais \int car on ne peut pas dénombrer dA (le nombre de fibres est infini).



4.6) Exemple :

1,5 2

Calcul de l'aire de la section du tablier de pont à caisson ci-dessous :



$$A = 12 \times 0,75 + \frac{(9+5) \times 2,75}{2} - \frac{(7,5+3,5) \times 2}{2}$$

$$= 17,25 \text{ m}^2$$

V) Moment statique et centre de gravité :

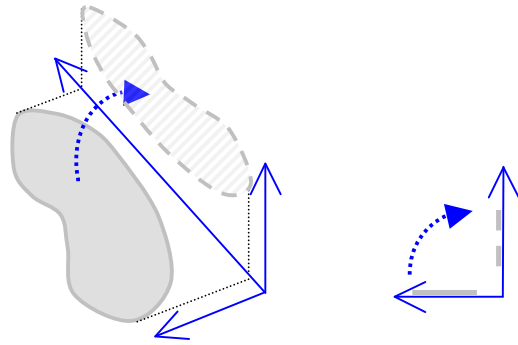
5.1) Lien entre moment statique et centre de gravité :

a) Observation :

Considérons une surface chargée par une force uniformément répartie.

Reversement autour de (Oy), renversement proportionnel à l'excentrement entre l'axe de rotation et le centre de gravité de la section.

Il existe donc une relation entre ce moment de renversement (appelé moment statique) par rapport à l'axe considéré et la coordonnée du centre de gravité.



b) Définitions :

- Centre de gravité :

Le centre de gravité (CdG) est le « point sur lequel un corps se tient en équilibre dans toutes ses positions ».

Notre section n'ayant pas de poids, on considérera qu'elle est soumise à une charge uniformément répartie.

- Moment statique :

Moment de renversement de la section lorsque celle-ci est soumise à une charge surfacique de 1 (sans unité. Ce n'est donc pas exactement un moment, mais le principe est le même).

5.2) Moments statiques :

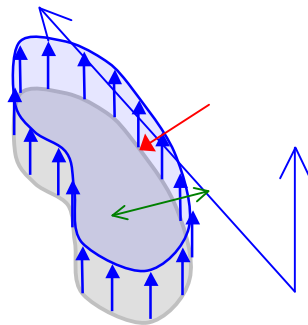
a) Moments statiques d'un élément :

Le moment statique autour de l'axe Oy vaut :

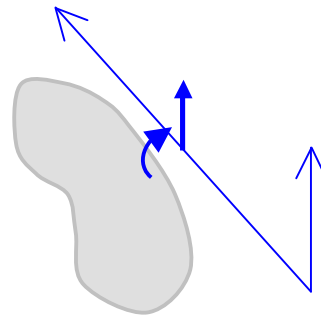
$$S_{Oy} = (A \times 1) \times z_G$$

- $A \times 1$ correspond à l'intensité de la force qui repose sur la section ;

- et z_G correspond au bras de levier de cette force, distance entre le centre de gravité de la section et l'axe Oy.



$$S_{Oy} = A \times z_G$$



$$S_{Oz} = A \times y_G$$

b) Unité et conversions :

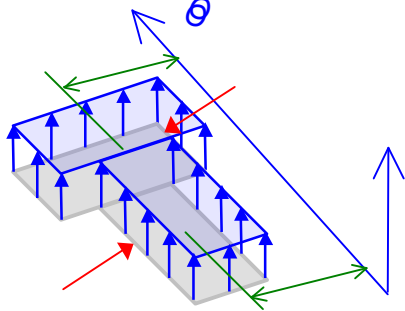
L'unité du moment statique est le $[m^3]$.

$$1000 \text{ mm}^3 = 1 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 1 \text{ cm}^3$$

$$1000 \text{ mm}^3 = 1000 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$

c) Moments statiques des sections décomposables :

Les moments statiques s'additionnent. En effet, si l'on étudie une section composée de plusieurs éléments :



$$S_{Oy} = \sum_{i=1}^n [S_{Oyi}] = \sum_{i=1}^n [A_i \times z_{Gi}]$$

$$S_{Oz} = \sum_{i=1}^n [S_{Ozi}] = \sum_{i=1}^n [A_i \times y_{Gi}]$$

Pour aider au calcul, il est possible d'utiliser le tableau suivant :

i	$A_i [m^2]$	$z_{Gi} [m]$	$A_i \times z_{Gi} [m^3]$	$y_{Gi} [m]$	$A_i \times y_{Gi} [m^3]$
1	A_1	z_{G1}	$A_1 \times z_{G1}$	y_{G1}	$A_1 \times y_{G1}$
...
n	A_n	z_{Gn}	$A_n \times z_{Gn}$	y_{Gn}	$A_n \times y_{Gn}$
$A = \sum A_i$		$S_{Oy} = \sum A_i \times z_{Gi}$		$S_{Oz} = \sum A_i \times y_{Gi}$	

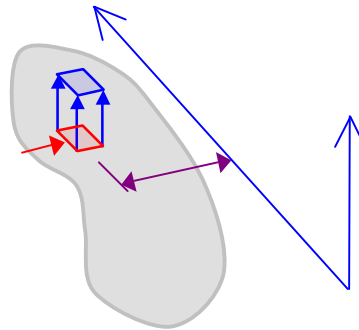
d) Moments statiques d'une fibre :

Le moment de renversement d'une fibre autour de l'axe (oy) est :

$$dS_{Oy} = F \times d = (1 \times dA) \times z$$

$$= z \times dA$$

$$dS_{Oz} = y \times dA$$

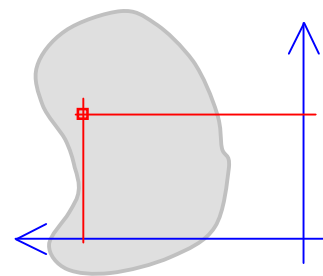


e) Moments statiques d'une forme quelconque :

Par conséquent :

$$S_{Oy} = \int_A z \times dA = \int_z \int_y z \times dz \times dy$$

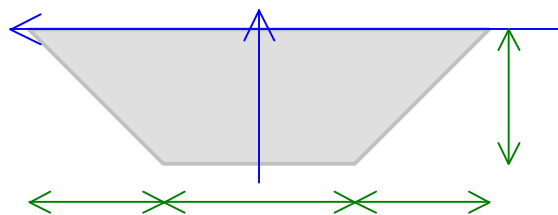
$$S_{Oz} = \int_A y \times dA = \int_z \int_y y \times dz \times dy$$



f) Exemple :

Calcul du moment statique par rapport à l'axe Oz de la pièce métallique d'assemblage de contreventement suivante :

$$S_{Oz} = \sum_{i=1}^n [A_i \times y_{Gi}]$$



$\frac{4R}{3\pi}$
 $\frac{D}{2}$
 $\frac{R}{2}$
 $\frac{D}{3}$
 $\frac{D}{2}$
 $\frac{b}{2}$
 $\frac{b}{3}$
 $\frac{D}{2}$
 $\frac{b}{2}$
 $\frac{b}{3}$
 91 mm

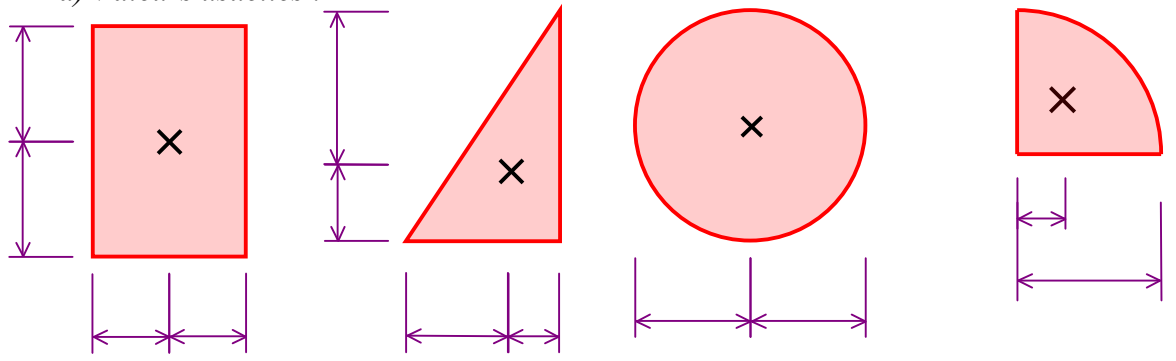
180 mm

i	A_i [mm ²]	y_{Gi} [mm]	$A_i \times y_{Gi}$ [mm ³]
1	45.10 ³	-100	- 4,5.10 ⁶
2	150.10 ³	-150	- 22,5.10 ⁶
3	45.10 ³	-100	- 4,5.10 ⁶
A =	240.10 ³	$S_{Oz} =$	-31,5.10 ⁶ mm ³

-31,5 dm³

5.3) Centre de gravité :

a) Valeurs usuelles :



⊗ Remarque : pour les sections possédant un axe de symétrie, le centre de gravité se situe obligatoirement sur cet axe (donc si la section possède 2 axes de symétrie, le centre de gravité est à l'intersection. Chaque section ne possédant qu'un centre de gravité, tous les axes de symétrie d'une section son concourants en un point).

b) Formules :

Comme $S_{Oy} = A \times z_G$ et $S_{Oz} = A \times y_G$, on a :

$z_G = \frac{S_{Oy}}{A}$ $y_G = \frac{S_{Oz}}{A}$

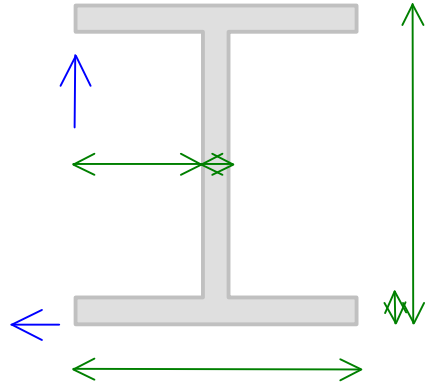
Pour les sections décomposables en n surfaces élémentaires, on a :

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n [A_i \times z_{Gi}]}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n [A_i \times z_{Gi}]}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n [A_i \times y_{Gi}]}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n [A_i \times y_{Gi}]}{A}$$

c) Exemple :

Calcul de la position du centre de gravité de l'YPE 180 suivant :



i	A_i [m ²]	z_{Gi} [m]	$A_i \times z_{Gi}$ [m ³]	y_{Gi} [m]	$A_i \times y_{Gi}$ [m ³]
1	728	- 45,5	- 33,12.10 ³	176	128,13.10 ³
2	869	- 45,5	- 39,54.10 ³	90	78,21.10 ³
3	728	- 45,5	- 33,12.10 ³	4	2,91.10 ³
A =	2325	$S_{Oy} =$	- 106.10 ³	$S_{Oz} =$	209.10 ³

$z_G = \frac{S_{Oy}}{A} = \frac{-106 \cdot 10^3}{2325} = -45,5 \text{ mm}$

$y_G = \frac{S_{Oz}}{A} = \frac{209 \cdot 10^3}{2325} = 90 \text{ mm}$

⊗ Remarque : on vérifie que le CdG se trouve au point de rencontre des deux axes de symétrie ! (2H)

$q_x = z$

VI) Moments quadratiques :

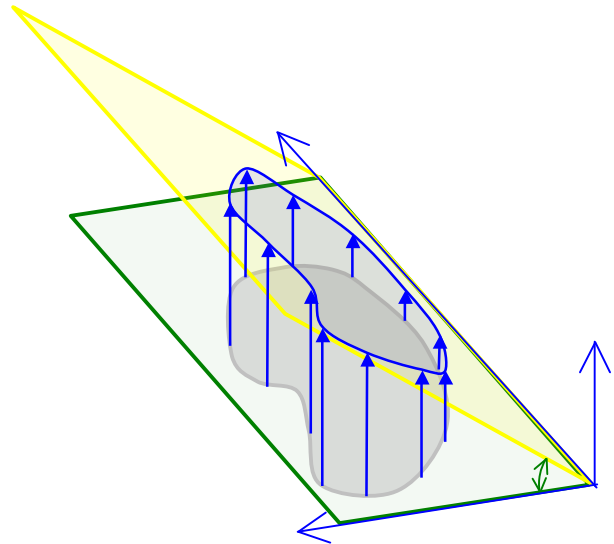
6.1) Généralités :

a) Notion :

⊗ Exemple : (c.f. règle) : pour une même poutre, selon qu'on la mette à chant ou à plat, la déformée est différente lorsqu'on la charge identiquement. On dit qu'elle est + ou - flexible ; ou - ou + rigide. L'un des phénomènes qui rentre en compte dans cette observation est un nouveau paramètre : le moment quadratique (ce n'est pas l'aire car elle ne change pas).

b) Définition :

Charge fictive de la section - I_{Oy}
 Pour schématiser le moment quadratique par rapport à un axe, nous pouvons dire que c'est le moment engendré par un chargement surfacique triangulaire formant un plan à 45° et passant à 0 sur l'axe :



Il se note I_{Oz} ou I_{Oy} selon l'axe :

- « I » pour moment quadratique (anciennement appelé moment d'inertie - terme actuellement banni par risque de confusion avec l'énergie accumulée par un solide en mouvement) ;
- « Oy » (ou « Oz ») pour l'axe (O : sera remplacé par G lorsque le repère passe par le centre de gravité) ;

⊗ Remarque 2 : il existe encore bien d'autres moments quadratiques comme, par exemple, celui par rapport à un couple d'axes. Nous nous bornerons à étudier les moments quadratiques par rapport à un axe.

c) Unité et conversion :

L'unité du moment quadratique est le m^4 .

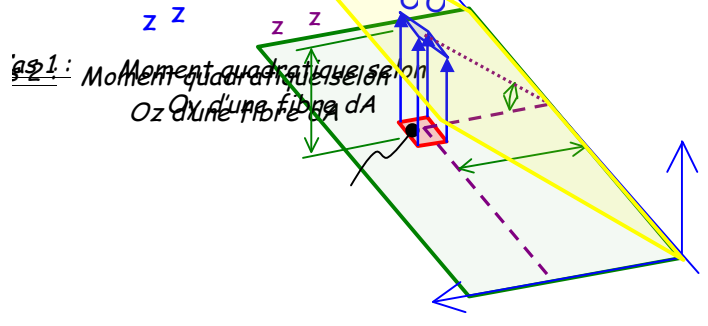
$1000 \text{ mm}^4 = 0,1 \times 10^4 \text{ mm}^4 = 0,1 \text{ cm}^4$

$1000 \text{ mm}^4 = 1000 \times 10^{-12} \text{ m}^4$

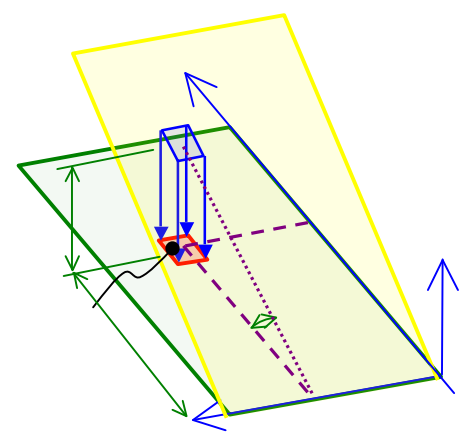
6.2) Formules :

a) Moments quadratiques d'une fibre :

$dA = \frac{b}{2} \frac{dy}{3} = \frac{b}{6} dy$



cas 1: Moment quadratique selon Oz d'une fibre dA



$$dI_{Oy} = (dA \times z) \times z = z^2 \times dA$$

$$dI_{Oz} = (dA \times y) \times y = y^2 \times dA$$

b) Moments quadratiques d'une forme quelconque :

Comme les moments quadratiques s'additionnent, on en déduit que, pour une section quelconque :

$$I_{Oy} = \int_A z^2 \times dA = \iint_{z,y} z^2 \times dz \times dy$$

$$I_{Oz} = \int_A y^2 \times dA = \iint_{z,y} y^2 \times dz \times dy$$

Remarque : les moments quadratiques sont toujours positifs.

c) Valeurs usuelles :

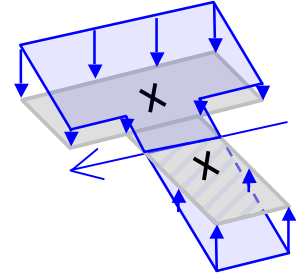
			$I_{Gz} = R^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$ $I_{Gy} = \frac{\pi R^4}{8}$
$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$	$I_{Gz} = \frac{bh^3}{36}$ $I_{Gy} = \frac{hb^3}{36}$	$I_{Gz} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_{Gy} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$	$I_{Gz} = I_{Gy} = \frac{R^4}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$

z G₂
G

d) Moments quadratiques des sections décomposables :

chargement fictif de la section

Les moments quadratiques (tout comme les moments statiques et les moments) s'additionnent. Mais attention, ils ne peuvent s'additionner que s'ils sont par rapport au même axe ! Il est donc nécessaire de savoir faire une transposition de repère.



e) Translation de repère - formules de Huygens :

On démontre que (c.f. annexes) :

$$I_{Oz} = I_{Gz} + A \times y_G^2$$

$$I_{Oy} = I_{Gy} + A \times z_G^2$$

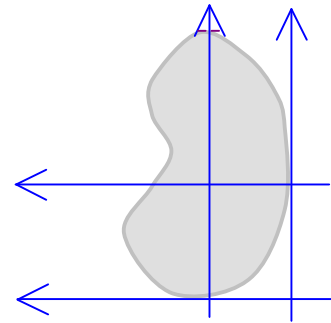
Ainsi, pour une section composée de n éléments, on a :

$$I_{Gz} = \sum_{i=1}^n (A_i \times y_{Gi}^2 + I_{Gzi})$$

$$I_{Gy} = \sum_{i=1}^n (A_i \times z_{Gi}^2 + I_{Gyi})$$

avec : I_{Gz} : le moment quadratique par rapport au centre de gravité de la section (on peut remplacer par I_{Oz} pour tout autre point) ;

I_{Gzi} : les moments quadratiques des éléments par rapport à leur propre centre de gravité.



Pour faciliter l'application de telles formules, on peut utiliser les tableaux ci-dessous :

- pour calculer I_{Gz} :

i	$A_i [m^2]$	$y_{Gi} [m]$	$A_i \times y_{Gi}^2 [m^4]$	$I_{Gzi} [m^4]$ Ancien repère	$I_{Gzi} [m^4]$
1	A_1	y_{G1}	$A_1 \times y_{G1}^2$	I_{Gz1}	$A_1 \times y_{G1}^2 + I_{Gz1}$
...
n	A_n	y_{Gn}	$A_n \times y_{Gn}^2$	I_{Gzn}	$A_n \times y_{Gn}^2 + I_{Gzn}$
$\sum A_i \times y_{Gi}$			$I_{Gz} = \sum (A_i \times y_{Gi}^2 + I_{Gzi}) =$		

⊗ Remarque : si l'axe z du nouveau repère passe par le CdG, on doit vérifier que $\sum A_i \times y_{Gi} = 0$

- pour calculer I_{Gy} :

i	$A_i [m^2]$	$z_{Gi} [m]$	$A_i \times z_{Gi}^2 [m^4]$	$I_{Gyi} [m^4]$ Ancien repère	$I_{Gyi} [m^4]$
1	A_1	z_{G1}	$A_1 \times z_{G1}^2$	I_{Gy1}	$A_1 \times z_{G1}^2 + I_{Gy1}$
...
n	A_n	z_{Gn}	$A_n \times z_{Gn}^2$	I_{Gyn}	$A_n \times z_{Gn}^2 + I_{Gyn}$
$\sum A_i \times z_{Gi}$			$I_{Gy} = \sum (A_i \times z_{Gi}^2 + I_{Gyi}) =$		

⊗ Remarque : si l'axe y du nouveau repère passe par le CdG, on doit vérifier que $\sum A_i \times z_{Gi} = 0$

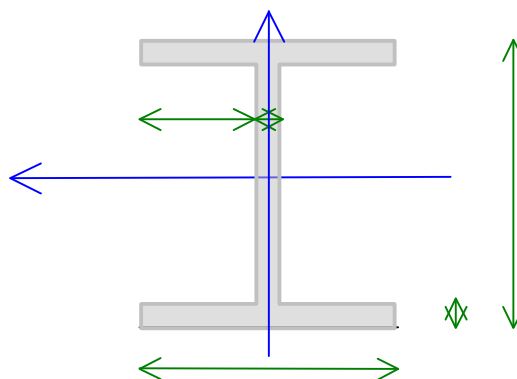
G

f) Exercice :

Calcul des moments quadratiques I_{Gz} et I_{Gy} par rapport à son centre de gravité, de l'IPE 180 suivant : ∞

91 mm

180 mm



- pour calculer I_{Gz} :

i	A_i [mm ²]	y_{Gi} [mm]	$A_i \times y_{Gi}^2$ [mm ⁴]	I_{Gzi} [mm ⁴] Ancien repère	I_{Gzi} [mm ⁴]
1	728	- 86	$5,384 \cdot 10^6$	3882	$5,39 \cdot 10^6$
2	869,2	0	0	$1,948 \cdot 10^6$	$1,948 \cdot 10^6$
3	728	86	$5,384 \cdot 10^6$	3882	$5,39 \cdot 10^6$
$\sum A_i \times y_{Gi} = 0$			$I_{Gz} = \sum (A_i \times y_{Gi}^2 + I_{Gzi}) =$		$1,27 \cdot 10^7$

Ou 1270 cm^4

- pour calculer I_{Gy} :

i	A_i [mm ²]	z_{Gi} [mm]	$A_i \times z_{Gi}^2$ [mm ⁴]	I_{Gyi} [mm ⁴] Ancien repère	I_{Gyi} [mm ⁴]
1	728	0	0	$502,4 \cdot 10^3$	$502,4 \cdot 10^3$
2	869,2	0	0	$2,035 \cdot 10^3$	$2,035 \cdot 10^3$
3	728	0	0	$502,4 \cdot 10^3$	$502,4 \cdot 10^3$
$\sum A_i \times z_{Gi} = 0$			$I_{Gy} = \sum (A_i \times z_{Gi}^2 + I_{Gyi}) =$		$1,01 \cdot 10^6$

Ou 101 cm^4

⊗ Remarque : Il existe des catalogues donnant les moments quadratiques des profilés normalisés tels qu'IPE. Les valeurs qu'on y trouve sont proches des notre, mais légèrement différentes. Cette différence provient du fait que nous avons simplifié la section.

VII) Rayons de giration :

7.1) Définition :

On pose « i_{oy} » : rayon de giration d'une section A selon l'axe Oy.

$$\sqrt{\frac{I_{Oy}}{A}} = i_{oy}$$

$$i_{Oz} = \sqrt{\frac{I_{Oz}}{A}}$$

7.2) Exemple :

Calcul des rayons de giration de l'IPE 180 précédent au niveau du CdG :

$$i_{Gz} = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{A}} = \sqrt{\frac{1273 \cdot 10^{-8}}{2325 \cdot 10^{-6}}} = 7,4 \cdot 10^{-2} m$$

$$i_{Gy} = \sqrt{\frac{I_{Gy}}{A}} = \sqrt{\frac{101 \cdot 10^{-8}}{2325 \cdot 10^{-6}}} = 2,1 \cdot 10^{-2} m$$

VIII) Modules de flexion élastique :

200 G

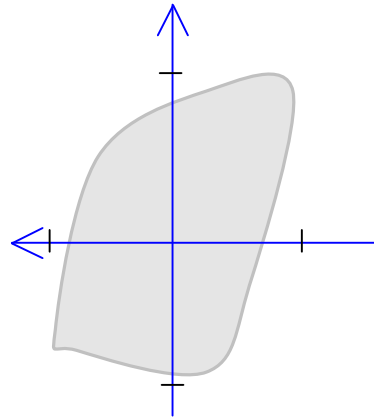
8.1) Définition :

Soit « v_z » la distance de la fibre extrême au centre de gravité parallèlement à l'axe Gz ;
 et « v_y » la distance de la fibre extrême au centre de gravité parallèlement à l'axe Gy ;

On a :

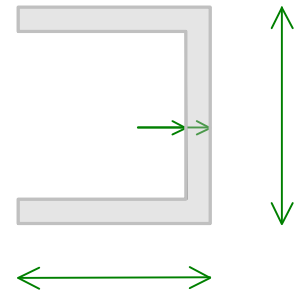
$$W_{elz} = \frac{I_{Gz}}{v_y}$$

$$W_{ely} = \frac{I_{Gy}}{v_z}$$



8.2) Exemple :

Connaissant la position du centre de gravité :
 G {74,100} (dans un repère positionné en bas à droite de la section),
 déterminer
 - les distances v_y-inférieur, v_y-supérieur, v_z-inférieur, v_z-supérieur ;
 - les modules de flexions élastiques inférieurs et supérieurs selon chaque axe (z et y) dans le repère (y,G,z).



v_y-inférieur = -100 mm v_y-supérieur = 100 mm v_z-inférieur = -74 mm v_z-supérieur = 126 mm

i	A _i [mm ²]	y _{Gi} [mm]	A _i × y _{Gi} ² [mm ⁴]	I _{Gzi} [mm ⁴] <i>Ancien repère</i>	I _{Gzi} [mm ⁴]
1	40.10 ³	0	0	133,3.10 ⁶	133,3.10 ⁶
2	-28,8.10 ³	0	0	-61,4.10 ⁶	-61,4.10 ⁶
Σ A _i × y _{Gi} = 0			I _{Gz} = Σ (A _i × y _{Gi} ² + I _{Gzi}) =		71,9.10 ⁶

i	A _i [mm ²]	z _{Gi} [mm]	A _i × z _{Gi} ² [mm ⁴]	I _{Gyi} [mm ⁴] <i>Ancien repère</i>	I _{Gyi} [mm ⁴]
1	40.10 ³	26	27,0.10 ⁶	133,3.10 ⁶	160,3.10 ⁶
2	-28,8.10 ³	36	-37,3.10 ⁶	-77,8.10 ⁶	-115.10 ⁶
Σ A _i × z _{Gi}			I _{Gy} = Σ (A _i × z _{Gi} ² + I _{Gyi}) =		45,2.10 ⁶

Donc

$$W_{ely\ supérieur} = \frac{I_{Gy}}{v_z\ supérieur} = \frac{45,2 \times 10^6}{126} = 359 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_{elz\ supérieur} = \frac{I_{Gz}}{v_y\ supérieur} = \frac{71,9 \times 10^6}{100} = 719 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_{ely\ inférieur} = \frac{I_{Gy}}{v_z\ inférieur} = \frac{45,2 \times 10^6}{-74} = -611 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_{elz\ inférieur} = \frac{I_{Gz}}{v_y\ inférieur} = \frac{71,9 \times 10^6}{-100} = -719 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

IX) Résumé :

9.1) Formules :

Désignation	Formule	Unité	Remarque
Aire	$A = \int dA = \iint_{z,y} dz \times dy$	[m ²]	$A = \sum_{i=1}^n A_i$
Moment statique			
Selon y	$S_{Oy} = \int z \times dA = \iint_{z,y} z \times dz \times dy$		$S_{Oy} = \sum_{i=1}^n [A_i \times z_{Gi}] = \sum_{i=1}^n [S_{Oyi}]$
Selon z	$S_{Oz} = \int y \times dA = \iint_{z,y} y \times dz \times dy$	[m ³]	$S_{Oz} = \sum_{i=1}^n [A_i \times y_{Gi}]$
			$S_{Gy} = 0$ $S_{Gz} = 0$
Position du centre de gravité			
Selon y	$Y_G = \frac{S_{Oz}}{A}$		
Selon z	$Z_G = \frac{S_{Oy}}{A}$	[m]	
Moment quadratique			
Selon y	$I_{Oy} = \int z^2 \times dA = \iint_{z,y} z^2 \times dy \times dz$		$I_{Gy} = \sum_{i=1}^n [I_{Gyi} + A_i \times z_{Gi}^2]$
Selon z	$I_{Oz} = \int y^2 \times dA = \iint_{z,y} y^2 \times dy \times dz$	[m ⁴]	$I_{Gz} = \sum_{i=1}^n [I_{Gzi} + A_i \times y_{Gi}^2]$
Rayon de giration			
Selon y	$i_{Gy} = \sqrt{\frac{I_{Gy}}{A}}$		
Selon z	$i_{Gz} = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{A}}$	[m]	
Module de flexion élastique			
Selon y	$W_{ely}^{supérieur} = \frac{I_{Gy}}{v_{zsupérieur}}$		$W_{ely}^{inférieur} = \frac{I_{Gy}}{v_{zinférieur}}$
Selon z	$W_{elz}^{inférieur} = \frac{I_{Gz}}{v_{yinférieur}}$	[m ³]	$W_{elz}^{supérieur} = \frac{I_{Gz}}{v_{ysupérieur}}$

9.2) Démarche de résolution :

1) Dessiner la section en posant un repère quelconque ;

⊗ Remarque 1 : pour que toutes les coordonnées soient positives, il est conseillé de positionner le repère en bas à droite.

⊗ Remarque 2 : cette étape n'est pas nécessaire si l'on connaît la position du CdG.

2) Déterminer la position du centre de gravité ;

⊗ Remarque : pour cela, calculer le moment statique. Il est conseillé d'utiliser le tableau ci-dessous :

i	$A_i [m^2]$	$z_{Gi} [m]$	$A_i \times z_{Gi} [m^3]$	$y_{Gi} [m]$	$A_i \times y_{Gi} [m^3]$
1	A_1	z_{G1}	$A_1 \times z_{G1}$	y_{G1}	$A_1 \times y_{G1}$
...
n	A_n	z_{Gn}	$A_n \times z_{Gn}$	y_{Gn}	$A_n \times y_{Gn}$
$A = \sum A_i$		$S_{Oy} = \sum A_i \times z_{Gi}$		$S_{Oz} = \sum A_i \times y_{Gi}$	

3) Calculer les moments quadratiques (généralement I_{Gz} et I_{Gy}) ;

⊗ Remarque 1 : avant de se lancer dans le calcul, redessiner la section avec le repère placé en G.

⊗ Remarque 2 : on conseille d'utiliser les tableaux suivants :

i	$A_i [m^2]$	$y_{Gi} [m]$	$A_i \times y_{Gi}^2 [m^4]$	$I_{Gzi} [m^4]$ Ancien repère	$I_{Gzi} [m^4]$
1	A_1	y_{G1}	$A_1 \times y_{G1}^2$	I_{Gz1}	$A_1 \times y_{G1}^2 + I_{Gz1}$
...
n	A_n	y_{Gn}	$A_n \times y_{Gn}^2$	I_{Gzn}	$A_n \times y_{Gn}^2 + I_{Gzn}$
$\sum A_i \times y_{Gi}$			$I_{Gz} = \sum (A_i \times y_{Gi}^2 + I_{Gzi}) =$		

i	$A_i [m^2]$	$z_{Gi} [m]$	$A_i \times z_{Gi}^2 [m^4]$	$I_{Gyi} [m^4]$ Ancien repère	$I_{Gyi} [m^4]$
1	A_1	z_{G1}	$A_1 \times z_{G1}^2$	I_{Gy1}	$A_1 \times z_{G1}^2 + I_{Gy1}$
...
n	A_n	z_{Gn}	$A_n \times z_{Gn}^2$	I_{Gyn}	$A_n \times z_{Gn}^2 + I_{Gyn}$
$\sum A_i \times z_{Gi}$			$I_{Gy} = \sum (A_i \times z_{Gi}^2 + I_{Gyi}) =$		

4) Modules de flexion élastique ;

⊗ Remarque : positionner des cotations pour préciser la position des fibres extrêmes.

5) Rayons de giration ;

⊗ Remarque 1 : un résultat doit obligatoirement comporter une unité !

⊗ Remarque 2 : nous sommes en Génie Civil ; tout résultat doit avoir un nombre limité de chiffres après la virgule reflétant sa précision. On conseille vivement 3 chiffres significatifs pour les résultats finaux et 4 pour les résultats intermédiaires.

G

x x

y

ANNEXES :

I_{Gy}

O

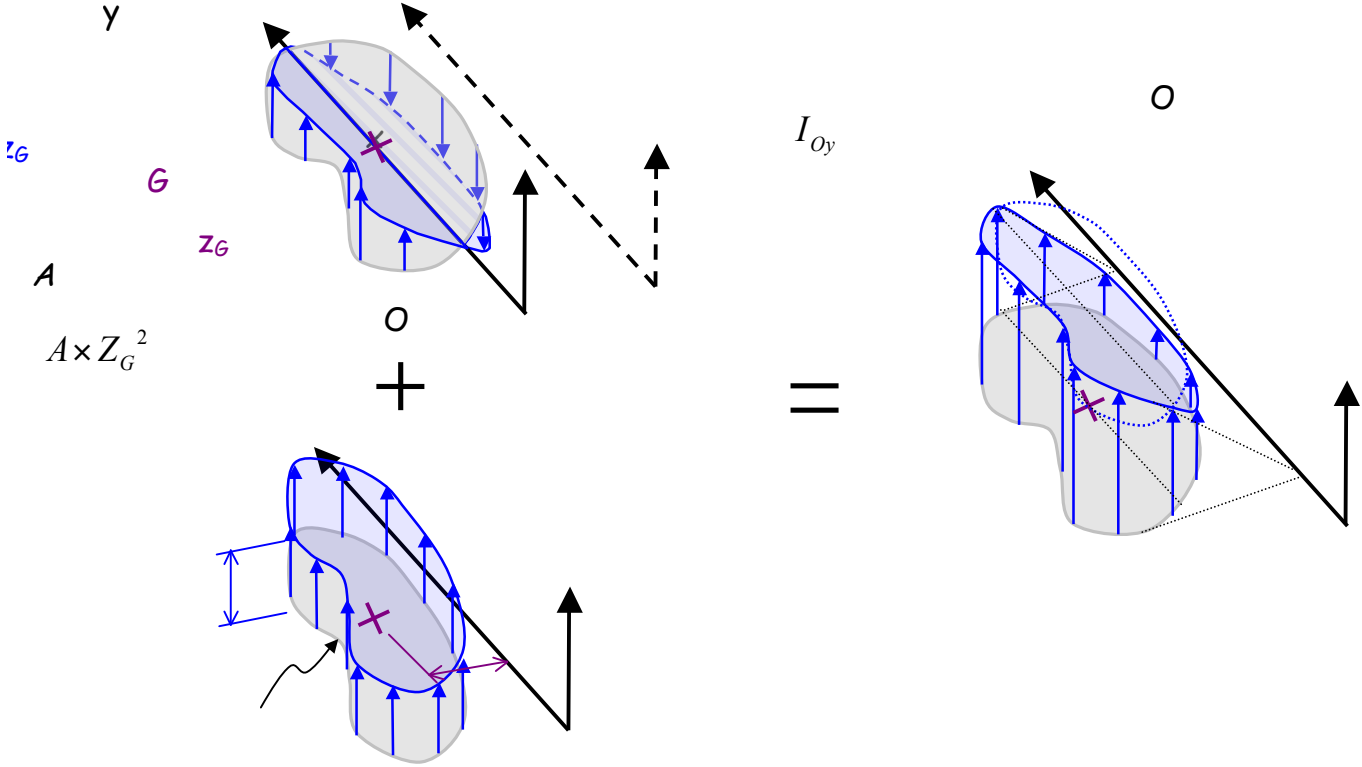
Démonstration des moments quadratiques usuels :

- Démonstration de la formule de Huygens :

G

x

O



Donc $I_{Oy} = A \times Z_G^2 + I_{Gy}$ et, par permutation circulaire : $I_{Oz} = A \times Y_G^2 + I_{Gz}$

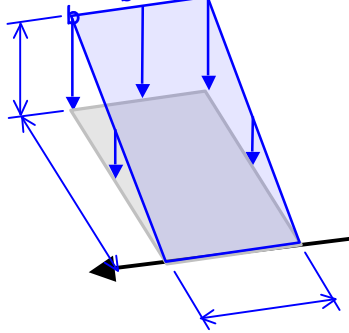
h/2 z

h h/2
2R z G

z

- Moment quadratique d'un rectangle :

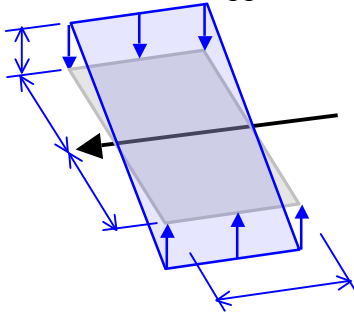
➤ Par rapport au bas de la section :



$$I_{Oz} = \left[(b \times h) \times \frac{h}{2} \right] \times \frac{2}{3} \times h$$

$$= \frac{bh^3}{3}$$

➤ Par rapport au centre de gravité de la section :

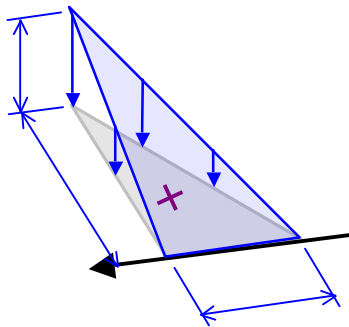


$$I_{Gz} = 2 \times \left[\left(b \times \frac{h}{2} \right) \times \frac{h}{2} \times \frac{1}{2} \right] \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{h}{2} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

⊗ Remarque : on peut vérifier la formule de Huygens :

$$I_{Gz} = I_{Oz} - A \times y_G^2 = \frac{bh^3}{3} - (b \times h) \times \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

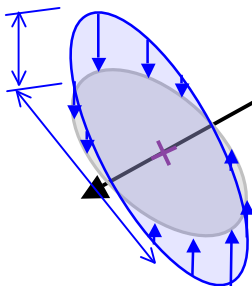
- Moment quadratique d'un triangle :



$$I_{Oz} = \left[\frac{b \times h^2}{6} \right] \times \frac{h}{2} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = I_{Oz} - A \times y_G^2 = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{b \times h}{2} \right) \times \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

- Moment quadratique d'un disque :



$$I_{Gz} = \iint_A y^2 \times dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r^3 \times \sin^2 \theta) \times d\theta \times dr$$

$$= \int_0^R r^3 \times \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta) \times d\theta \times dr = \int_0^R r^3 \times \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) \times d\theta \times dr$$

$$= \int_0^R \frac{r^3}{2} \times \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi} \times dr = \pi \int_0^R r^3 \times dr = \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$= \frac{\pi R^4}{4}$$

y'
O
z'

dA I_{Gy} I_{Gz} I_{Oy} I_{Oz} A

Autres moments quadratiques :

- Moment quadratique composé (ou moment quadratique par rapport à un couple d'axes) :

$$I_{Ozy} = \int_A z \times y \times dA$$

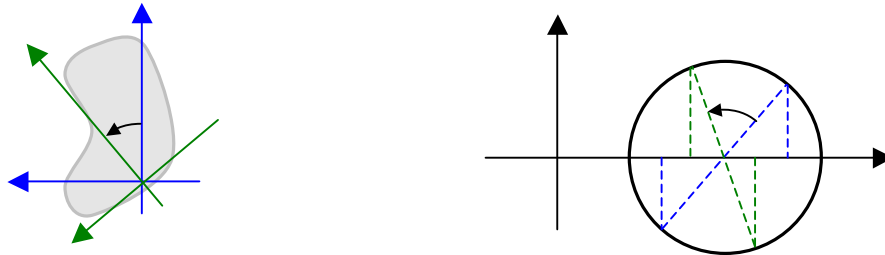
- Moment quadratique polaire :

$$I_O = \int_A r^2 \times dA$$

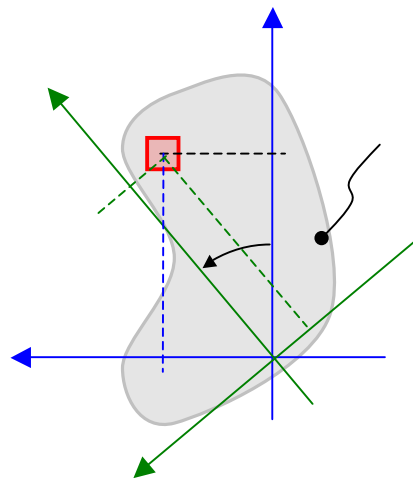
$$I_O = I_{Oz} + I_{Oy}$$

- Moment quadratique par rapport à un axe tourné d'un angle θ :

Si l'on fait tourner le repère d'un angle θ , on démontre que le moment quadratique varie comme suit :



⊗ Remarque : Les axes pour lesquels les moments quadratiques sont extremums sont appelés axes principaux. Nous travaillerons toujours dans ce repère. Si I_{Gz} est maximal, nous avons intérêt à charger la poutre selon l'axe des y.



- Rappel des formules des moments quadratiques connus :

$$I_{Oz} = \iint_A y^2 \times dA$$

$$I_{Oy} = \iint_A z^2 \times dA$$

$$I_{Oyz} = \iint_A y \times z \times dA$$

- Relations liant les coordonnées de la fibre dA dans les deux repères :

$$z' = z \times \cos(\theta) + y \times \sin(\theta)$$

$$y' = -z \times \sin(\theta) + y \times \cos(\theta)$$

- Relations trigonométriques connues :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad \cos(\theta) \times \sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

• Démonstration :

$$\begin{aligned} I_{Oz'} &= \iint_A y'^2 \times dA = \iint_A (-z \times \sin(\theta) + y \times \cos(\theta))^2 \times dA \\ &= \iint_A z^2 \times \sin^2(\theta) \times dA + \iint_A y^2 \times \cos^2(\theta) \times dA - 2 \times \iint_A z \times y \times \cos(\theta) \times \sin(\theta) \times dA \\ &= \iint_A z^2 \times \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \times dA + \iint_A y^2 \times \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \times dA - 2 \times \iint_A z \times y \times \frac{\sin(2\theta)}{2} \times dA \\ &= \frac{1}{2} \left[\iint_A z^2 \times dA - \iint_A z^2 \times \frac{\cos(2\theta)}{2} \times dA \right] + \frac{1}{2} \left[\iint_A y^2 \times dA + \iint_A y^2 \times \frac{\cos(2\theta)}{2} \times dA \right] - \iint_A z \times y \times \sin(2\theta) \times dA \\ &= \frac{I_{Oz} + I_{Oy}}{2} + \frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \times \cos(2\theta) - I_{Oyz} \times \sin(2\theta) \quad \heartsuit \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Oy'} &= \iint_A z'^2 \times dA = \iint_A (z \times \cos(\theta) + y \times \sin(\theta))^2 \times dA \\ &= \iint_A z^2 \times \cos^2(\theta) \times dA + \iint_A y^2 \times \sin^2(\theta) \times dA + 2 \times \iint_A z \times y \times \cos(\theta) \times \sin(\theta) \times dA \\ &= \iint_A z^2 \times \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \times dA + \iint_A y^2 \times \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \times dA + 2 \times \iint_A z \times y \times \frac{\sin(2\theta)}{2} \times dA \\ &= \frac{1}{2} \left[\iint_A z^2 \times dA + \iint_A z^2 \times \frac{\cos(2\theta)}{2} \times dA \right] + \frac{1}{2} \left[\iint_A y^2 \times dA - \iint_A y^2 \times \frac{\cos(2\theta)}{2} \times dA \right] + \iint_A z \times y \times \sin(2\theta) \times dA \\ &= \frac{I_{Oy} + I_{Oz}}{2} + \frac{I_{Oy} - I_{Oz}}{2} \times \cos(2\theta) + I_{Oyz} \times \sin(2\theta) \quad \heartsuit \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Oy'z'} &= \iint_A y' \times z' \times dA = \iint_A (z \times \cos(\theta) + y \times \sin(\theta)) \times (y \times \cos(\theta) - z \times \sin(\theta)) \times dA \\ &= -\iint_A (z^2 \times \cos(\theta) \times \sin(\theta) \times dA) + \iint_A (y^2 \times \cos(\theta) \times \sin(\theta) \times dA) \\ &\quad + \iint_A (y \times z \times \cos^2(\theta) \times dA) - \iint_A (y \times z \times \sin^2(\theta) \times dA) \\ &= (I_{Oz} - I_{Oy}) \times \cos(\theta) \times \sin(\theta) + I_{Oyz} \times (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \\ &= \frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \times \sin(2\theta) + I_{Oyz} \times \cos(2\theta) \quad \heartsuit \end{aligned}$$

• Cercle de Mohr :

Si l'on reprend les équations ① et ③ que l'on met au carré et que l'on additionne, on a :

$$I_{Oz'} - \frac{I_{Oz} + I_{Oy}}{2} = \frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \times \cos(2\theta) - I_{Oyz} \times \sin(2\theta) \quad \heartsuit$$

$$I_{Oy'z'} = \frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \times \sin(2\theta) + I_{Oyz} \times \cos(2\theta) \quad \heartsuit$$

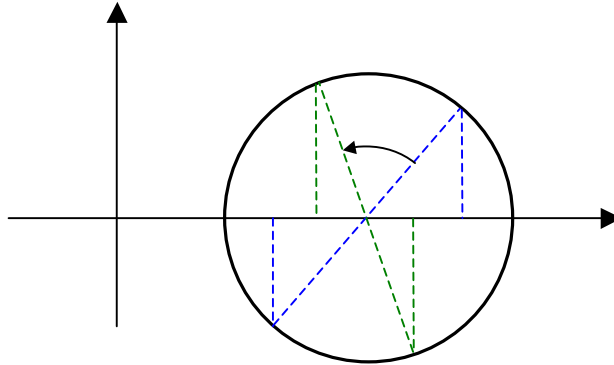
O

$$\begin{matrix}
 I_{GY} & & I_{GY'} & & I_O \\
 & I_{GZ'} & C & I_{GZ} & \\
 \end{matrix}$$

$$\left(I_{Oz'} - \frac{I_{Oz} + I_{Oy}}{2} \right)^2 = \left(\frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \right)^2 \times \cos^2(2\theta) + I_{Oyz}^2 \times \sin^2(2\theta) - (I_{Oz} - I_{Oy}) \times I_{Oyz} \times \cos(2\theta) \times \sin(2\theta) \quad \text{⊗}$$

$$\left(I_{Oz'} - \frac{I_{Oz} + I_{Oy}}{2} \right)^2 + \left(\frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \right)^2 \times \sin^2(2\theta) + I_{Oyz}^2 \times \cos^2(2\theta) + (I_{Oz} - I_{Oy}) \times I_{Oyz} \times \cos(2\theta) \times \sin(2\theta) \quad \text{⊗}$$

C'est l'équation du cercle. En effet, si on pose I_{Oz} , I_{Oy} et I_{Oyz} connus, on a une équation de la forme : $(z - z_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$



de centre c d'abscisse $= \frac{I_{Oz} + I_{Oy}}{2}$;

de rayon $R = \sqrt{\left(\frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \right)^2 + I_{Oyz}^2}$

On nomme I_{Oz} et I_{Oy} les extremums (moments quadratiques principaux). On a :

$$I_{Oz} = c + R = \frac{I_{Oz} + I_{Oy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \right)^2 + I_{Oyz}^2} \quad (\text{valeur maxi}) \text{ et}$$

$$I_{Oy} = c - R = \frac{I_{Oz} + I_{Oy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{Oz} - I_{Oy}}{2} \right)^2 + I_{Oyz}^2} \quad (\text{valeur mini}).$$

Ces deux valeurs étant éloignées de π sur le cercle, ils sont à angle droit sur la section. Lorsque I_{GZ} est maximal, I_{GY} est minimal.

THEORIE DES POUTRES – CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS 1

I) Généralités :	1
1.1) But de l'étude :	1
1.2) Poutres ou barres ?	1
1.3) Définition d'une poutre :	1
II) Hypothèses :	2
III) Notations et définitions d'une section et d'une fibre :	3
3.1) Schéma d'une section :	3
3.2) Définitions :	3
a) Section :	3
b) Fibre :	3
IV) Aire :	4
4.1) Définition :	4
4.2) Rappels :	4
a) Valeurs usuelles :	4
b) Unité et conversion :	4
4.3) Aire des sections décomposables :	4
4.4) Aire d'une fibre :	4
4.5) Aire des sections quelconques :	4
4.6) Exemple :	5
V) Moment statique et centre de gravité :	6
5.1) Lien entre moment statique et centre de gravité :	6
a) Observation :	6
b) Définitions :	6
5.2) Moments statiques :	6
a) Moments statiques d'un élément :	6
b) Unité et conversions :	6
c) Moments statiques des sections décomposables :	7
d) Moments statiques d'une fibre :	7
e) Moments statiques d'une forme quelconque :	7
f) Exemple :	7
5.3) Centre de gravité :	8
a) Valeurs usuelles :	8
b) Formules :	8
c) Exemple :	8
VI) Moments quadratiques :	10
6.1) Généralités :	10
a) Notion :	10
b) Définition :	10
c) Unité et conversion :	10
6.2) Formules :	11
a) Moments quadratiques d'une fibre :	11
b) Moments quadratiques d'une forme quelconque :	11
c) Valeurs usuelles :	11
d) Moments quadratiques des sections décomposables :	12
e) Translation de repère - formules de Huygens :	12
f) Exercice :	13
VII) Rayons de giration :	14
VIII) Modules de flexion élastique :	15
IX) Résumé :	16
9.1) Formules :	16
9.2) Démarche de résolution :	17