ETUDE DES TREILLIS

I) Généralités :

On appelle treillis un assemblages de barres articulées entre elles de manière à ce que chacune des barres ne soit sollicitée qu'en traction-compression. Ceux sont des structures triangulées qui sont principalement utilisées en charpente métalliques et en charpente bois (une structure triangulée est une structure composée de barres formant des triangles).

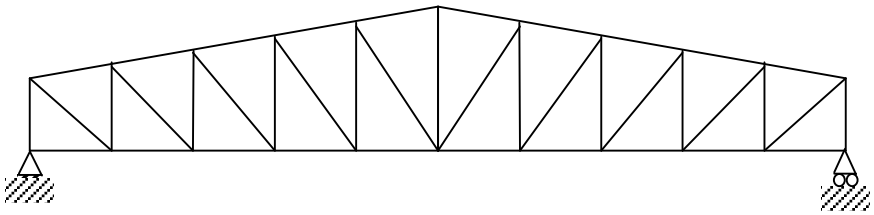


Figure 1 : exemple de treillis

Terminologie :

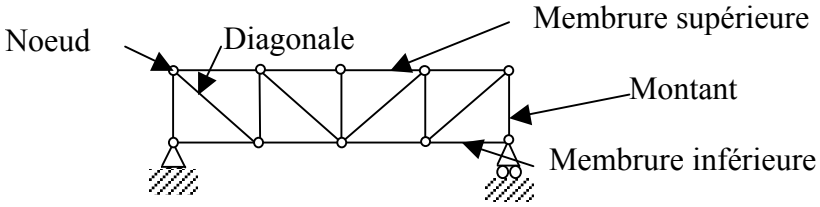


Figure 2 : Terminologie d'un treillis

On appelle *noeud* une articulation entre plusieurs barres. La figure 3 présente un exemple de détail de la réalisation pratique d'un noeud de treillis.
Pour assurer que chacune des barres ne soit sollicité qu'en traction ou en compression il faut que :

- le poids des barres soit négligeable devant les autres sollicitations,
- les sollicitations extérieures ne soient que des efforts appliqués sur les noeuds,
- les liaisons avec l'extérieur soient des appuis fixes ou des appuis mobiles. Lorsque toute la géométrie est dans un même plan et que les efforts appliqués sont dans ce plan, le treillis est dit *plan*.

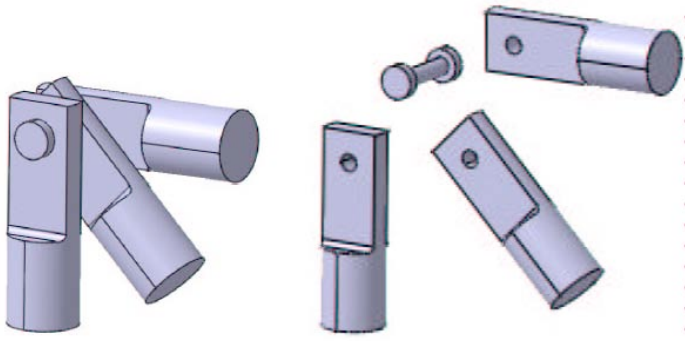
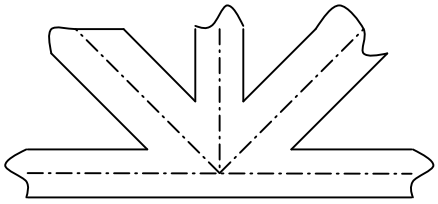


Figure 3 : Détail d'un noeud

Hypothèses :

Pour pouvoir calculer la structure comme un treillis, certaines hypothèses sont posées :
- les articulations entre barres sont considérées comme parfaites ;
- les charges sont appliquées au nœud ;
- les axes des barres doivent concourir aux nœuds :



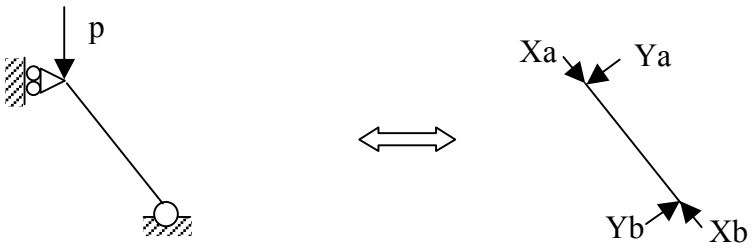
Méthodes de résolution :

① La première étape consiste à déterminer la nature du treillis. En effet, comme n'importe quelle structure (portiques par exemple), il existe des treillis hyperstatiques.
On pose :
- b : le nombre de barres ;
- e : le nombre de réactions d'appuis ;
- n : le nombre de nœuds.

➔ Si b + e < 2 n, la structure est hypostatique ;
➔ Si b + e = 2 n, la structure est isostatique ;
➔ Si b + e > 2 n, la structure est hyperstatique ;

② La deuxième étape consiste à trouver les valeurs des réactions d'appuis (grâce au PFS sur la structure entière) ;

③ Puis, on résout le problème en recherchant les efforts normaux dans les barres.
En effet, les barres étant bi-articulées, seul un effort de compression ou de traction peut solliciter les barres (la flexion n'est pas possible car les forces sont appliquées aux nœuds).



De nombreuses méthodes de résolution sont possibles :
- Méthodes graphiques (par vecteurs représentés à l'échelle – polygones des forces) ;
- Méthodes analytiques (par calcul).

Parmi ces méthodes, 2 principes se distinguent :
- Méthodes des nœuds (on équilibre les nœuds des treillis) ;
- Méthodes des sections (on équilibre les barres du treillis).

III) Méthodes analytiques :

III.1) Méthode des nœuds :

a) Principe de la méthode :

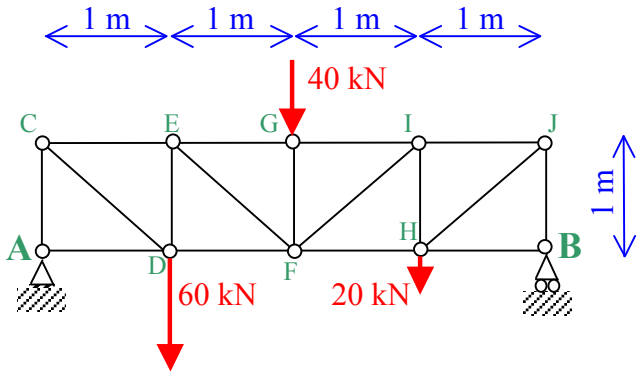
Le principe de la méthode des nœuds consiste à déterminer de manière analytique l'équilibre de chaque noeud du treillis.

b) Méthodologie :

① Modéliser la structure entière (barres, appuis et chargements) ;
② Déterminer la nature du treillis ;
③ Calculer les actions de liaisons (réaction d'appuis) ;
④ Dessiner la structure éclatée (isolée) en n'oubliant pas de dessiner les nœuds entre chaque barre ainsi que les forces extérieures (Réactions d'appuis et chargement);
⑤ Avec un peu de réflexion et grâce au PFS, ainsi que le principe des actions mutuelles, on détermine l'équilibre des noeuds (sachant que seul les efforts normaux passent dans les barres – pas d'effort tranchant ni de moment). On équilibre les nœuds afin de n'avoir que 2 inconnues pour résoudre la structure ($\Sigma Fx = 0$; $\Sigma Fy = 0$) ;
⑥ Etablir un tableau bilan donnant les efforts dans chaque barre.

c) Exemple :

①



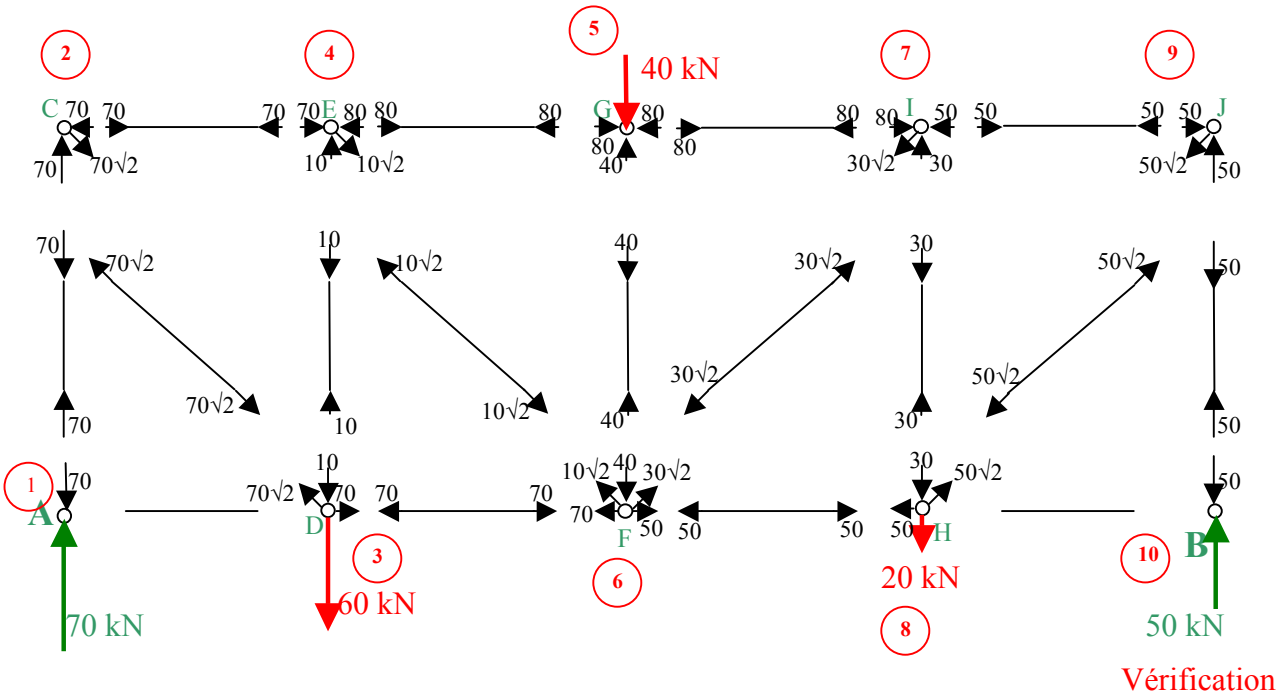
② Nature :

b = 17 ; n = 10 ; e = 3
b + e = 17 + 3 = 20
2 n = 20
b + e = 2 n => isostatique

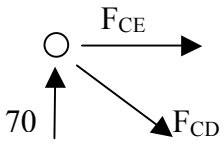
③

$$\sum Fx = 0 = X_A \qquad X_A = 0$$
$$\sum Fy = 0 = Y_A + Y_B - 60 - 40 - 20 = Y_A + Y_B - 120 \qquad Y_B = 50kN$$
$$\sum M_{A/Z} = 0 = +Y_B \cdot 4 - 60 \cdot 1 - 40 \cdot 2 - 20 \cdot 3 = 4 \cdot Y_B - 200 \qquad Y_A = 70kN$$

④



Exemple de résolution sur le deuxième nœud :



$\Sigma F_Y = O \Rightarrow$
$\Sigma F_X = O \Rightarrow$

⑥

Barre	*Signe*	*Intensité*
AC	-	70
AD		0
CD	+	70√2
DE	-	10
CE	-	70
DF	+	70
EF	+	10√2
EG	-	80
FG	-	40
FI	+	30√2
FH	+	50
GI	-	80
HI	-	30
IJ	-	50
HJ	+	50√2
HB		0
BJ	-	50

d) Conclusion sur la méthode analytique des noeuds :

Cette méthode est simple. Juste en appliquant le PFS sur les noeuds de manière simplifiée (seulement efforts normaux), on détermine les valeurs exactes de sollicitation de chaque barre. On peut se vérifier sur le dernier nœud.

Seuls problèmes :

- il faut beaucoup de place pour pouvoir éclater la structure (dessin) ;
- on doit généralement résoudre entièrement le treillis pour obtenir l'effort dans une barre bien précise ;
- les erreurs se cumulent au fur et à mesure de l'avancement de la résolution.

III.2) Méthode de Ritter :

a) Principe de la méthode :

Le principe de la méthode de Ritter consiste à effectuer des coupes habilement positionnées de manière à déterminer les efforts qui passent dans les barres. Les coupes ne doivent libérer au maximum que 3 inconnues. En appliquant le PFS sur l'une des deux parties de la structure, on détermine ces efforts.
Puisque l'on applique les 3 équations du PFS sur la demi-structure (de gauche ou de droite), il faut choisir judicieusement le point pour effectuer la somme du moment. On essaye généralement de ne pas faire intervenir d'autres équations pour ne pas cumuler les erreurs.

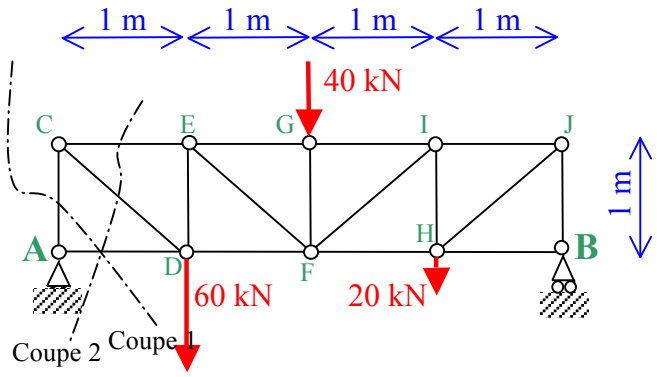
b) Méthodologie :

① Modéliser la structure entière (barres, appuis et chargements) ;
② Déterminer la nature du treillis ;
③ Calculer les actions de liaisons (réaction d'appuis) ;
④ Effectuer une première coupure traversant au maximum 3 barres. ;
⑤ Appliquer le PFS sur l'un des tronçons du treillis et en déterminer les actions de liaisons entre les tronçons (on mettra toutes les forces dans le sens de la traction) ;
⑥ Passer aux coupures suivantes traversant de nouvelles barres ;
⑦ Etablir un tableau bilan donnant les efforts dans chaque barre.

c) Exemple :

Nous allons reprendre l'exemple résolu grâce au Crémona :

①



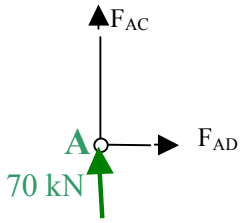
② Nature :

b = 17 ; n = 10 ; e = 3
b + e = 17 + 3 = 20
2 n = 20
b + e = 2 n => isostatique

③

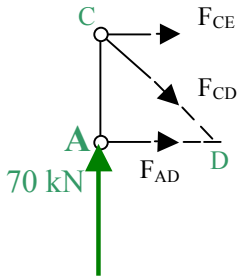
$$\sum Fx = 0 = X_A \qquad X_A = 0$$
$$\sum Fy = 0 = Y_A + Y_B - 60 - 40 - 20 = Y_A + Y_B - 120 \qquad Y_B = 50kN$$
$$\sum M_{A/Z} = 0 = +Y_B \cdot 4 - 60 \cdot 1 - 40 \cdot 2 - 20 \cdot 3 = 4 \cdot Y_B - 200 \qquad Y_A = 70kN$$

④
⑤
⑥



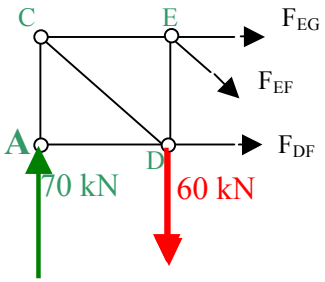
$$\sum Fx = 0 = F_{AD}$$
$$\sum Fy = 0 = F_{AC} + 70$$

$$F_{AD} = 0kN \quad F_{AC} = -70kN$$

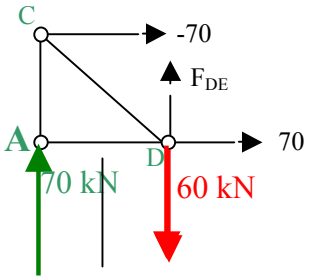


$$\sum M_{C/Z} = 0 = F_{AD} = 0$$
$$\sum Fy = 0 = -F_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2} + 70$$
$$\sum M_{D/Z} = 0 = -F_{CE} - 70$$

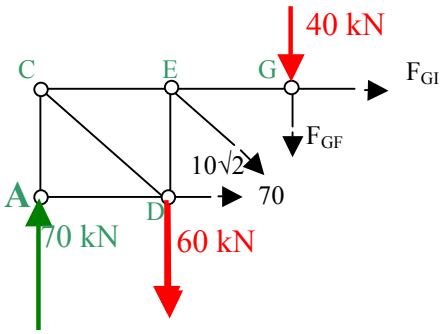
$$F_{CD} = 70\sqrt{2}kN \quad F_{CE} = -70kN$$



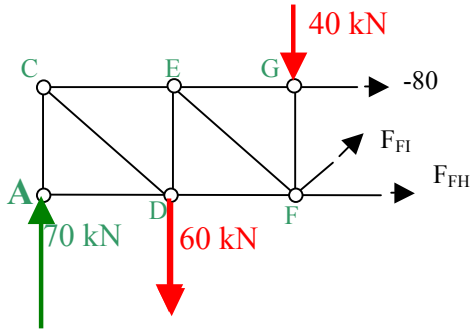
$$F_{DF} = 70kN \qquad F_{EF} = 10\sqrt{2}kN$$
$$F_{EG} = -80kN$$



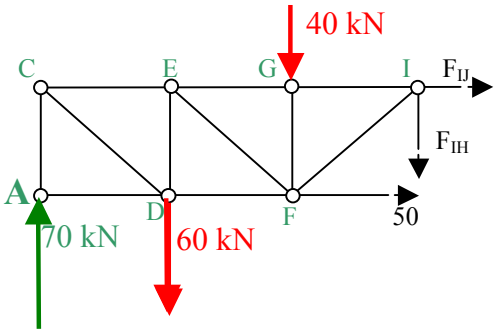
$$F_{DE} = -10kN$$



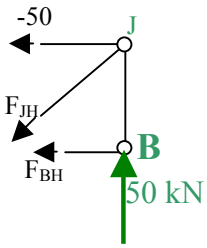
$$F_{GI} = -80kN \quad F_{GF} = -40$$



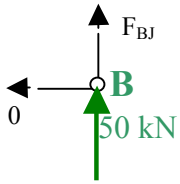
$F_{FI} = 30\sqrt{2}kN \quad F_{FH} = 50$



$F_{IJ} = -50N \quad F_{IH} = -30$



$F_{JH} = 50\sqrt{2}kN \quad F_{BH} = 0$



$F_{BJ} = -50$

⑦

Barre	Signe	Intensité
AC	-	70
AD		0
CD	+	70√2
DE	-	10
CE	-	70
DF	+	70
EF	+	10√2
EG	-	80
FG	-	40
FI	+	30√2
FH	+	50
GI	-	80
HI	-	30
IJ	-	50
HJ	+	50√2
HB		0
BJ	-	50

d) Conclusion sur la méthode analytique de Ritter :

Cette méthode est simple. Juste en appliquant le PFS sur la demi-structure, on détermine les valeurs de sollicitation de chaque barre. Cependant, les calculs sont plus laborieux que la méthode des nœuds. Un gros avantage à retenir : pour connaître les sollicitations dans 1 barre bien précise, on n'est pas obligé de résoudre le treillis totalement. De plus, en posant correctement le PFS, les erreurs ne se cumulent pas dans la plupart des cas. Cependant, on ne peut pas se vérifier.

ETUDE DES TREILLIS **1**

I) Généralités : **1**
Terminologie : 1
Hypothèses : 2
Méthodes de résolution : 2

III) Méthodes analytiques : **3**
III.1) Méthode des nœuds : 3
a) Principe de la méthode : 3
b) Méthodologie : 3
c) Exemple : 3
d) Conclusion sur la méthode analytique des noeuds : 5
III.2) Méthode de Ritter : 6
a) Principe de la méthode : 6
b) Méthodologie : 6
c) Exemple : 6
d) Conclusion sur la méthode analytique de Ritter : 9